Preserver problems and isometries of operator algebras

東京大学大学院数理科学研究科　森 迪也 *

Michiya Mori

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo

概要

作用素環の設定における保存問題，特に等距離写像に関する近年の研究について，筆者による成果を中心に概説する．

1　保存問題とは

保存問題（*preserver problem*）とは，「与えられたクラスの環ふたつのあいだの写像であって，特定の構造を保つもの（*preserver*）をすべて決定せよ」といった類の問題を指す．保存問題はこれまで，行列環や関数環，作用素環，あるいはその部分集合などの設定において活発に研究されてきた．この概説においては，作用素環（C^* 環や von Neumann 環）の設定における保存問題を考える．

作用素環上の保存問題については，たとえば次のような構造（またはその組み合わせ）を保つ写像の研究がなされている：

- 線型構造．線型構造を保つという仮定の入った保存問題は線型保存問題（linear preserver problem）とよばれ，古くから調べられてきた対象である．線型の仮定をやや弱めた，和を保つという仮定などもよく見られる．
- 積構造．普通の作用素の積の他に，Jordan 積を考える場合などがある．より弱い構造として，作用素の組についての積が 0 になるという関係や，互いに交換すると

* This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. また，本研究は数物フロンティア・リーディング大学院プログラム（FMSP）の助成を得たものである．

いう関係を保つ写像なども調べられている．

- 距離構造．すなわち等距離写像に関する研究．作用素環の設定では，作用素ノルムに関する距離の他にも，物理学的な動機をもとにした距離などに関して色々な研究がある．より弱い構造として，連続性など位相に関する条件を考えることも多い．
- 順序構造．特に，自己共役作用素の通常の順序．順序の他に，作用素の二項関係を保つ写像について種々の仮定をおくこともできる．
- その他に，特定の部分集合（たとえばユニタリ作用素や冪等作用素）を保つ写像，あるいは関数（たとえば行列式や階数に類するもの）を保つ写像などについて，多数の研究が存在する．

近年は，線型性を仮定しない，非線型保存問題（nonlinear preserver problem）の研究が活発になりつつある．以下では主に，作用素環の設定における非線型保存問題，特に作用素ノルムについての等距離写像を扱う．

作用素環の設定における保存問題については，Molnár の本 [9] に種々の話題が書かれている．また，近年の保存問題の研究については，2017 年の集会「Preservers Everywhere」を記念した Acta Scientiarum Mathematicarum 誌の特集号 [22] に多くの記事がある．

2　作用素環

作用素環論に疎い読者に向けて，作用素環についてごくごく簡単に説明する．教科書として [19] を挙げておく．作用素環とは，広い意味では線型空間のあいだの作用素（線型写像）のなす環のことであるが，今回はそれよりずっと狭い意味でのものを考える．すなわち，単に作用素環といえば，C* 環または von Neumann 環を指すものとする．

これらは複素 Hilbert 空間 H 上の線型作用素のなす環のクラスである．

$$B(H) := \{x\colon H \to H\text{，線型，}\ \|x\| := \sup_{\xi\in H, \|\xi\|_H \le 1} \|x\xi\|_H < \infty\}$$

で H 上の有界線型作用素全体のなす Banach 環を表す．$B(H)$ は $\langle x\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x^*\eta\rangle$, $\xi, \eta \in H$ により特徴づけられる対合写像 $*\colon B(H) \to B(H); x \to x^*$ をもつ．$B(H)$ の部分環で，ノルム位相（resp. 各点収束位相）および $*$ で閉じたものを *C* 環*（resp. *von Neumann 環*）とよぶ．

von Neumann 環は C* 環である．また，単位元をもつ可換な C* 環はあるコンパクト Hausdorff 空間 K について $C(K) := \{f\colon K \to \mathbb{C} \mid f \text{ は連続 }\}$ にノルム $\|f\| := \sup_{k\in K}|f(k)|$ を与えた Banach 環と同型であることが知られている（Gelfand–Naimark

の定理）．逆に，$C(K)$ は可換な C^* 環としての構造をもつ．ゆえに，一般の C^* 環はしばしば $C(K)$ の「非可換化」とみなされる．

2.1　記号の準備

C^* 環 A に対して，次の記号を用いる：

- $A_{sa} := \{a \in A \mid a^* = a\}$ $\cdots$ A の**自己共役**作用素の全体.
- $\mathcal{Z}(A) := \{x \in A \mid xy = yx \ \forall y \in A\}$ $\cdots$ A の**中心**.
- $\mathcal{P}(A) := \{p \in A \mid p = p^* = p^2\}$ $\cdots$ A の**射影**作用素全体.
- A が単位的のとき，すなわち単位元をもつとき，1 で A の単位元を表す．より一般に，$c \in \mathbb{C}$ に対し，作用素 1 のスカラー倍 $c \cdot 1$ を c と書く．
- $\mathcal{U}(A) := \{u \in A \mid uu^* = u^*u = 1\}$ $\cdots$ A の**ユニタリ**作用素全体 = **ユニタリ群**.

3　等距離写像

保存問題の研究の一種として，等距離写像についての研究がある．等距離写像とは（もちろん），距離空間 (X_1, d_1) から距離空間 (X_2, d_2) への写像 Φ で，任意の $x, y \in X_1$ に対して $d_1(x, y) = d_2(\Phi(x), \Phi(y))$ を満たすもののことである．まず，等距離写像に関する古典的な結果である，Banach–Stone の定理を思い出そう．

定理 3.1 (Banach–Stone の定理)**.** K と L をコンパクト Hausdorff 空間，$\Phi\colon C(K) \to C(L)$ を複素線型な全射等距離写像とする．このとき，ある同相写像 $\varphi\colon K \to L$ と連続関数 $a\colon L \to \mathbb{T}$ $(:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\})$ が存在して，$(\Phi(f))(x) = a(x)f(\varphi^{-1}(x))$, $f \in C(K), x \in L$ が成立する．

$C(K)$ は可換 C^* 環であり，たくさんの構造をもつが，Banach–Stone の定理の仮定に登場するのはその Banach 空間としての構造のみで，大事なはずの積構造についての仮定はない．しかしこの定理は，Banach 空間としての等距離同型が C^* 環としての同型を用いて表されることを意味する．つまり，弱い構造についての同型から強い意味での同型が導かれている．保存問題において研究されている典型的な対象は，このように単純かつ弱そうな仮定の下で強い結論を導くというものである．

作用素環上の等距離写像の最初の研究は，Banach–Stone の定理の非可換化にあたる，Kadison による次の定理である．

定理 3.2 (Kadison，[5, Theorem 7]). A, B を単位的 C^* 環，$\Phi\colon A \to B$ を複素線型全射等距離写像とする．このとき，$\Phi(1)$ は B のユニタリ作用素である．さらに，$J\colon A \to B$ を $J(x) := \Phi(1)^{-1}\Phi(x)$ で定めると，J は A から B への Jordan $*$-同型となる．

C^* 環 A, B に対して，条件

$$J(x^*) = J(x)^*, \quad J(xy + yx) = J(x)J(y) + J(y)J(x), \quad \forall\, x,\, y \in A$$

を満たす複素線型全単射 $J\colon A \to B$ を *Jordan* $*$-同型とよぶ[*1]．実は，Jordan $*$-同型は適当な意味で $*$-同型（$=$ C^* 環としての同型）と $*$-antiisomorphism（転置写像のようなもの）の直和であることが知られている．

Kadison の定理に登場するこの Jordan $*$-同型は，作用素環の設定における保存問題の研究において頻出の最重要単語である．実際，Jordan $*$-同型は距離，順序，作用素の組の交換可能性など，多数の構造を保つ．それゆえ，保存問題への答えに Jordan $*$-同型が登場する場面がたくさんある．ただし，Jordan $*$-同型は積の順序を保つとは限らないため，たとえば作用素環としての $*$-同型は Jordan $*$-同型からは従わないことに注意．

Kadison の定理において，線型性の仮定は実はそれほど重要ではない．なぜか．この概説において，線型空間の凸集合 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ に対して，写像 $f\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が条件 $f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, $x, y \in \mathcal{C}_1$, $\lambda \in [0, 1]$ を満たすとき，f は *affine* であるという．特に，線型空間ふたつのあいだの affine 写像は実線型写像を平行移動したものに他ならない．実は，ふたつのノルム空間のあいだの全射等距離写像は affine であることが知られている（Mazur–Ulam の定理）．ゆえに，Kadison の定理で線型性の仮定を外したとしても，Φ は実線型写像を用いて表され，複素線型の場合とは少しだけ異なるが同様の結論が導かれる．

Mazur–Ulam の定理の一般化として，Mankiewicz は任意のノルム空間の開連結集合ふたつのあいだの全射等距離写像が affine 写像に拡張することを示した [7]．こういった事実を動機として，（特に開でも凸でもない）作用素環の部分構造について，そのあいだの等距離写像の一般形を考えるという研究が近年多く行われている．その先駆的成果が羽鳥と Molnár による次の定理である：

定理 3.3 (羽鳥–Molnár, [4, Theorem 1]). A と B を単位的 C^* 環，$\Phi\colon \mathcal{U}(A) \to \mathcal{U}(B)$ をユニタリ群のあいだの全射等距離写像とする．このとき，ある Jordan $*$-同型 $J\colon A \to B$ と B の中心に属する射影 $q \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(B))$ が存在して，$\Phi(u) = \Phi(1)(J(u)q + J(u)^*(1-q))$,

[*1] Kadison は初期の論文において Jordan $*$-同型に相当するものを「C^*-isomorphism」と書いていたが，現在ではそのような言葉の使い方はしない．

$u \in \{e^{ia} \mid a \in A_{sa}\}$ が成り立つ．特に，A が von Neumann 環のとき，すべての $u \in \mathcal{U}(A)$ についてこの等式が成り立つ．

この定理は他のさまざまな場面で応用できることがわかってきている．特に，Tingley 問題とよばれる Banach 空間論の問題に対するアプローチに重要な役割を果たす．

3.1 作用素環の設定における Tingley 問題

Banach 空間 X に対し，S_X で X の単位球面を表すことにする．すなわち，$S_X := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$．Tingley 問題とは次の問題である．

問題 3.4 (Tingley 問題)**．** X と Y を Banach 空間，$\Phi\colon S_X \to S_Y$ を全射等距離写像とする．このとき，Φ は実線型な拡張 $\tilde{\Phi}\colon X \to Y$ をもつか．

この問題は 1987 年に Tingley により有限次元の場合に最初に考察された [21]．問題の動機としては前述の Mazur–Ulam, Mankiewicz の定理が挙げられる．X と Y（またはその一方）が古典的実 Banach 空間，たとえば L^p 空間や $C(K)$ (K はコンパクト) といった場合には Tingley 問題に対する答えは YES であることがわかっているが，一般の場合にこの問題に関しわかっていることはごくわずかである．特に，Tingley 問題の主張に反例が存在するか否かは未解決である．

作用素環の設定における Tingley 問題に対する最初の結果は，田中による以下の定理である．

定理 3.5 (田中，[20, Theorem 4.12])**．** M, N を有限 von Neumann 環，$\Phi\colon S_M \to S_N$ を全射等距離写像とする．このとき，ある Jordan $*$-同型 $J\colon M \to N$ と N の中心に属する射影 $q \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(N))$ が存在して，$\Phi(x) = \Phi(1)(J(x)q + J(x)^*(1-q))$, $x \in S_M$ が成り立つ．

この定理は X と Y が有限 von Neumann 環である場合の Tingley 問題への肯定的な解答を与える．有限 von Neumann 環とは，M の単位閉球の極点の集合がユニタリ群に一致する von Neumann 環を意味する．田中の論文では，上記の仮定の下で Φ が極点の集合すなわちユニタリ群を保つことを示し，羽鳥–Molnár の定理が応用されている．

この田中の論文が火付け役となり，Tingley 問題は作用素環の設定において広く研究されるに至った．詳しくは Peralta による概説 [15] を参照されたい．

ここでは，筆者による 2 つの結果を紹介したい．まず，von Neumann 環の前双対空間

に対する Tingley 問題への結果である．M を von Neumann 環とすると，ただ一つの Banach 空間 M_* が存在して，$(M_*)^* = M$ が成り立つことが知られている．この M_* を M の**前双対空間**とよぶ．たとえば $M = B(H)$ のとき，M_* はトレースクラス作用素全体にトレースノルムを与えた空間と一致する．

定理 3.6 (森，[10, Theorem 4.3])**.** M, N を von Neumann 環，$\Phi\colon S_{M_*} \to S_{N_*}$ を全射等距離写像とする．このとき，Φ は M_* から N_* への実線型写像に拡張する．

Tingley 問題に関して一般の設定でわかっていることはほとんどない．しかし，以下の事実が知られている（[10, Section 2] を参照）：

命題 3.7. X, Y を Banach 空間，$\Phi\colon S_X \to S_Y$ を全射等距離写像とする．このとき，部分集合 $F \subset S_X$ に対して，F が S_X の極大な凸部分集合であることは $\Phi(F)$ が S_Y の極大な凸部分集合であることと同値である．また，この同値条件が満たされるとき，$\Phi(-F) = -\Phi(F)$ が成り立つ．

これを用いて，M と N が有限 von Neumann 環の場合について定理 3.6 の証明の概略を説明しよう．有限性の仮定の下，S_{M_*} の極大な凸部分集合 F には，あるユニタリ $u \in \mathcal{U}(M)$ が対応し，$F = \{\varphi \in S_{M_*} \mid \varphi(u) = 1\}$ が成り立つことが知られている．ゆえに命題 3.7 より，各ユニタリ $u \in \mathcal{U}(M)$ に対して，ただ一つのユニタリ $\Phi_1(u) \in \mathcal{U}(N)$ が存在して，$\Phi(\{\varphi \in S_{M_*} \mid \varphi(u) = 1\}) = \{\psi \in S_{N_*} \mid \psi(\Phi_1(u)) = 1\}$ が成り立つことがわかる．さらに，ユニタリ $u_1, u_2 \in \mathcal{U}(M)$ に対して，二つの集合 $\{\varphi \in S_{M_*} \mid \varphi(u_1) = 1\}$ と $\{\varphi \in S_{M_*} \mid \varphi(u_2) = 1\}$ との M_* における Hausdorff 距離が $\|u_1 - u_2\|$ と等しいことが示せる．したがって，$\Phi_1\colon \mathcal{U}(M) \to \mathcal{U}(N)$ は全射等距離写像である．羽鳥–Molnár の定理（定理 3.3）より，Φ_1 は M から N への実線型全射等距離写像に拡張し，その拡張は Jordan $*$-同型を用いて表される．この写像から，自然に N_* から M_* への実線型全射等距離写像が定まるが，その逆写像が Φ を拡張することが示され，証明が完結する．

次の定理は一方の Banach 空間が単位的 C* 環である場合の Tingley 問題に対する答えを与える（小澤登高氏との共同研究）．

定理 3.8 (森–小澤，[11, Theorem 1])**.** A を単位的 C* 環，Y を実 Banach 空間，$\Phi\colon S_A \to S_Y$ を全射等距離写像とする．このとき，Φ は実線型写像に拡張する．

この定理の一方のみ C* 環であるという仮定は，双方が C* 環であると仮定する場合と大きな違いはないと思われるかもしれない．しかし，少し考えてみるとわかるが，この違

いは実は重大である．たとえば，羽鳥–Molnár の定理（定理 3.3）をこのような設定に応用することは，仮に A を有限次元と仮定しても難しいと思われる．ゆえに，この定理の証明には前述の結果とは異なる方法が必要である．

命題 3.7 より，Φ は単位球面上の極大凸部分集合を保つ．S_A の極大凸部分集合 F には，A^* の単位閉球の極点 φ が対応して，$F = \{x \in S_A \mid \varphi(x) = 1\}$ と表されることが知られている．（たとえば，A 上の pure state が A^* の単位閉球の極点である．）

証明で重要な役割を果たすのは，Φ がこのような F 上で affine となることである．一般に，Banach 空間の凸集合から別の Banach 空間の凸集合への全射等距離写像は affine であるとは限らない．筆者らは，Banach 空間の単位閉球が極点を十分多くもつとき，その単位閉球から任意の Banach 空間の凸集合への全射等距離写像が affine であることを示した．そのうえで，上記の F をこのような単位閉球で「近似」することにより，Φ が F 上で affine となることが示される．

たとえば有限次元可換 C* 環 ℓ_∞^n の場合によくわかるように，S_A 上の極大凸集合 F は，S_A 上で相対的に「大きい」部分を占めると思える．この事実を活用すれば，各 F 上で Φ が affine であることを用いて Φ を A 上の実線型写像に拡張できる[*2]．

3.2 状態空間の等距離写像

Tingley 問題の研究に付随して，次が得られた．ここでは結果を紹介するにとどめることにする．von Neumann 環 M に対して，$NS(M) := \{\varphi \in S_{M_*} \mid \varphi(1) = 1\}$, $QS(M) := \{\varphi \in M_* \mid \|\varphi\| = \varphi(1) \leq 1\}$ と定める．

定理 3.9（（本質的に）森，[10, Theorem 5.11]）**.** M, N を一次元でない von Neumann 環，$\Phi\colon NS(M) \to NS(N)$（または $\Phi\colon QS(M) \to QS(N)$）を全射等距離写像とする．このとき，ある Jordan $*$-同型 $J\colon M \to N$ が存在して，任意の $\varphi \in NS(M)$（または $\varphi \in QS(M)$）に対して $(\Phi(\varphi))(x) = \varphi(J^{-1}(x))$, $x \in N$ が成り立つ．

[*2] 実際は 2×2 行列環 $A = M_2(\mathbb{C})$ の場合に限りこの部分の議論が少々難しく，個別の証明が必要となった．実は，この概説で紹介する筆者の論文のいずれにおいても，2×2 行列環または I_2 型 von Neumann 環が例外的であり，個別の議論を行う場面がある．

3.3 射影束の等距離写像

作用素環の部分集合として，ユニタリ群と並んで重要な役割を果たすのが射影全体の集合である．特に，von Neumann 環の射影全体の集合は束をなすため，**射影束**とよばれる．以下では，von Neumann 環の射影束のあいだの等距離写像に関する結果 [12] について説明する．

M を von Neumann 環とする．$\mathcal{P}(M)$ の元 p に対して，その central support を $z(p)$ と表す．すなわち，$z(p)$ は p より大なる $\mathcal{Z}(M)$ の最小の射影を表す．この節においては，$\mathcal{P}(M)$ の連結成分を M の *Grassmann* **空間**とよぶ．また，Grassmann 空間 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(M)$ の任意の元 p に対して $z(p) = z(1-p) = 1$ が成り立つとき，$\mathcal{P}$ は**よい** Grassmann 空間であるということにする．このとき，次を示すのは難しくない：

- M のふたつの Grassmann 空間 $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$ と $p_1 \in \mathcal{P}_1$, $p_2 \in \mathcal{P}_2$ に対して，$\|p_1 - p_2\| = 1$ が成り立つ．
- $\mathcal{P}$ を M の Grassmann 空間，$p \in \mathcal{P}$ とする．このとき，$\mathcal{P}$ は von Neumann 環 $z(p)z(1-p)M$ のよい Grassmann 空間と自然に同一視できる．

これらの性質から，射影束のあいだの全射等距離写像を調べるためには，よい Grassmann 空間のあいだの全射等距離写像を考えれば十分であることがわかる．次が主定理である．

定理 3.10 (森，[12, Theorem 2.1])**.** $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ をそれぞれ von Neumann 環 M, N のよい Grassmann 空間，$\Phi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ を全射等距離写像とする．このとき，ある Jordan $*$-同型 $J\colon M \to N$ と N の中心に属する射影 $r \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(N))$ が存在して，次が成り立つ：

$$\Phi(p) = rJ(p) + (1-r)J(1-p), \quad p \in \mathcal{P}.^{*3}$$

この定理は古典的な Wigner の定理の拡張に相当する結果である．複素 Hilbert 空間 H 上の階数 1 の射影作用素全体を $\mathcal{P}_1(H)$ と表す．Wigner の定理は，「$\mathcal{P}_1(H)$ からそれ自身への全射等距離写像は，$B(H)$ 上の Jordan $*$-自己同型に拡張する」ことと本質的に同値な主張である．$\mathcal{P}_1(H)$ は $B(H)$ のよい Grassmann 空間であり，ゆえに Wigner の定理は定理 3.10 から直ちに従う．

この研究は，Gehér と Šemrl による，$B(H)$ の一般の Grassmann 空間からそれ自身への全射等距離写像の特徴づけを与えた論文 [3] を動機として行われた．彼らの論文にお

---

*3 この形が羽鳥–Molnár の定理（定理 3.3）の結論と非常に似ているという事実は，筆者にとって大変興味深い．

いては，ふたつの射影作用素に対し，それらをむすぶ適当な条件を満たす測地線が一意的に存在するか否か，というアイデアをもとにした次の命題が非常に重要な位置を占める．

命題 3.11 ([3])**.** H を Hilbert 空間，$p, q \in \mathcal{P}(B(H))$ とする．$\|p-q\| = 1$ と仮定する．さらに，$m(p,q) := \{P \in \mathcal{P}(B(H)) \mid \|p-P\| = 2^{-1/2} = \|q-P\|\}$ が空集合でないと仮定する．（$m(p,q)$ は $\mathcal{P}(B(H))$ における p と q の「中点全体の集合」に相当するものとなる．）このとき，次の二条件は同値である：

1. $pq = 0$ または $(1-p)(1-q) = 0$.
2. 任意の $P \in m(p,q)$ に対して，ただ一つの写像 $\theta\colon [0,\pi/2] \to \mathcal{P}(B(H))$ が存在して，次を満たす：

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = P, \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = q,$$
$$\|\gamma(\theta_1) - \gamma(\theta_2)\| = \sin|\theta_1 - \theta_2|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

この命題は von Neumann 環のことばに翻訳することが可能である．2 は距離構造のみが関係する条件であるため，任意の Grassmann 空間のあいだの全射等距離写像は 1 に相当する直交性に関する条件を保つことがわかる．この考察を，以下の Dye による結果と組み合わせたい．

von Neumann 環 M, N と全単射 $\psi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ について，

$$\text{任意の } p_1, p_2 \in \mathcal{P}(M) \text{ に対して，} p_1p_2 = 0 \Longleftrightarrow \psi(p_1)\psi(p_2) = 0$$

が成り立つとき，ψ を *orthoisomorphism* とよぶ.

定理 3.12 (Dye，[2, Corollary of Theorem 1])**.** M, N を I_2 型直和成分を持たない von Neumann 環，$\psi\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ を orthoisomorphism とする．このとき，ψ は M から N への Jordan $*$-同型に一意的に拡張する．

I_2 型の場合を無視すれば，Dye の定理を適用するために問題となるのが，一般には Grassmann 空間が射影束 $\mathcal{P}(M)$ より真に小さいことである．ゆえに，Grassmann 空間のあいだの写像を射影束のあいだの写像に広げる必要がある．そのために，上述の羽鳥–Molnár の定理（定理 3.3）を用いることができる．詳しくは説明しないが，ポイントとなったのは次の事実である：Grassmann 空間 $\mathcal{P}$ の二元 p, q が $pq = 0 = qp$ を満たすとき，$m(p,q) := \{P \in \mathcal{P} \mid \|p-P\| = 2^{-1/2} = \|q-P\|\}$ と $\mathcal{U}(pMp)/2 := \{u/2 \mid u \in \mathcal{U}(pMp)\}$ とのあいだの全射等距離写像が構成できる．

定理 3.10 から次も従う．

定理 3.13 (森，[12, Theorem 3.1])**.** M, N を可換な直和成分を持たない von Neumann 環とする．このとき，$\mathcal{P}(M)$ から $\mathcal{P}(N)$ への全射等距離写像が存在することは，M と N が Jordan $*$-同型であることと同値である．

4 von Neumann 環の順序同型

この節では，等距離写像の話ではないが，筆者による保存問題に関する最近の結果を紹介する．考える構造は順序構造である．A を C* 環とする．A_{sa} に通常の順序を与える．すなわち，$a, b \in A_{sa} \subset B(H)$ に対し，$a \leq b \iff$ 任意の $\xi \in H$ に対し $\langle a\xi, \xi\rangle \leq \langle b\xi, \xi\rangle$．$A_+ := \{a \in A_{sa} \mid a \geq 0\}$ と定める．

二つの順序集合 $(X_1, \leq_1)$, $(X_2, \leq_2)$ に対して，全単射 $\Phi\colon X_1 \to X_2$ が条件 $x \leq_1 y \iff \Phi(x) \leq_2 \Phi(y)\ \forall x, y \in X_1$ を満たすとき，Φ を**順序同型**とよぶことにする．

作用素環の設定における順序同型に関しての古典的な結果は，やはり Kadison によるものである．

定理 4.1 (Kadison，[6, Corollary 5])**.** A, B を単位的 C* 環，$\Phi\colon A_{sa} \to B_{sa}$ を線型な順序同型とし，$\Phi(1) = 1$ を仮定する．このとき，Φ は Jordan $*$-同型 $J\colon A \to B$ に拡張する．

Jordan $*$-同型は単位元を保つ順序同型であるため，この定理は C* 環の単位的線型順序同型の特徴づけを与える．

我々が考えたいのは，この定理において線型性の仮定を外した場合である．最も単純な $A = B = \mathbb{C}$ の場合を考えると，$A_{sa} = B_{sa} = \mathbb{R}$ となる．$\mathbb{R}$ 上の自己順序同型とはすなわち連続単調増加全単射であり，そのなかにはもちろん線型写像とは程遠いものがたくさんある．同様に，より一般の可換 C* 環に対しても，全く線型でないような順序同型が多く存在することがいえる．ゆえに，線型性の仮定を外すと得られる結論が大きく異なることが想定される．ところが，次が成り立つ．

定理 4.2 (Molnár，[8, Theorems 1, 2])**.** H を $\dim H \geq 2$ を満たす複素 Hilbert 空間，$\Phi\colon B(H)_{sa} \to B(H)_{sa}$ （resp. $\Phi\colon B(H)_+ \to B(H)_+$）を順序同型とする．このとき，$H$ 上の複素線型または反線型な有界線型全単射 $x\colon H \to H$ と $b \in B(H)_{sa}$ が存在して，$\Phi(a) = xax^* + b,\ a \in B(H)_{sa}$ (resp. $\Phi(a) = xax^*,\ a \in B(H)_+$) が成り立つ．

これはつまり，非可換な I 型因子環の設定では，任意の順序同型が affine （= 実線型写

像と平行移動の合成）となることを意味する．筆者はこの一般化に相当する次の結果を導いた：

定理 4.3 (森，[13, Theorem 4.3(1), (2)])**.** M, N を可換な直和成分を持たない von Neumann 環，$\Phi\colon M_{sa} \to N_{sa}$ （resp. $\Phi\colon M_+ \to N_+$）を順序同型とする．このとき，ある Jordan $*$-同型 $\Phi\colon M \to N$ と可逆元 $x \in N$，作用素 $b \in N_{sa}$ が存在して，$\Phi(a) = xJ(a)x^* + b,\ a \in M_{sa}$ (resp. $\Phi(a) = xJ(a)x^*,\ a \in M_+$) が成り立つ．

この証明のためには，大きな迂回を要した．すなわち，はじめから自己共役（正）作用素全体を考えるのではなく，まず作用素の「単位区間」に相当する effect algebra とよばれる部分集合 $E(M) := \{a \in M_{sa} \mid 0 \leq a \leq 1\}$ について考察した．筆者は，二つの effect algebras のあいだの順序同型の一般形を先に導き，それを利用して上記の定理を得た．

$E(B(H))$ 上の自己順序同型の一般形は Šemrl [17] により与えられた．しかしこれは $B(H)_{sa}$ の場合よりもやや厄介である．というのも，$E(B(H))$ 上の自己順序同型は affine とは限らないからである．具体的には，次の方法で affine でない順序同型が構成できる：実数 $\alpha < 1$ を固定する．閉区間 $[0, 1]$ 上の関数

$$f_\alpha(t) := \frac{t}{\alpha t + 1 - \alpha},\ t \in [0, 1]$$

を考える．これは $[0, 1]$ 上の同相写像である．von Neumann 環 M に対し，連続関数についての functional calculus により，写像 $\Psi\colon E(M) \to E(M)$ を $\Psi(a) := f_\alpha(a)$ で定めれば，Ψ が $E(M)$ 上の順序同型となることが示せる．

他方，複素線型または反線型な有界線型全単射 $x\colon H \to H$ に対して，写像 $a \mapsto xax^*$ は作用素の二つの区間のあいだの affine な順序同型の例を与える．この形の順序同型と，上記の f_α を用いて定まるような順序同型を何回か合成することで，比較的容易に次の $1 \Rightarrow 2$ が示せる．また $2 \Rightarrow 1$ も難しくない（ヒント：後述の局所可測作用素に関するコメントを見よ）．

命題 4.4. $a \in E(B(H))$ とする．このとき，次の二条件は互いに同値：

1. a と $1 - a$ の双方が $B(H)$ の可逆作用素である．
2. ある自己順序同型 $\Phi\colon E(B(H)) \to E(B(H))$ が存在して，$\Phi(1/2) = a$ が成り立つ．

よって，$E(B(H))$ 上の自己順序同型の一般形を知るには $\Phi(1/2) = 1/2$ を満たす順序同型 $\Phi\colon E(B(H)) \to E(B(H))$ について考えれば十分ということになるが，その一般形

は Molnár により既に与えられている（[8, Corollary 4]）：$E(B(H))$ 上の 1/2 を保つ任意の自己順序同型は $B(H)$ 上の Jordan $*$-自己同型に拡張する．

以上に相当する議論は一般の von Neumann 環に対しても可能だろうか．実は，von Neumann 環の設定では，因子環であっても（具体的には II 型の場合に） $\Phi(1/2)$ が可逆でないような例が構成できる．しかし筆者は，$B(H)$ の議論の一般化として，次を与えた：

命題 4.5 ([13, Proposition 3.12])**.** M, N を von Neumann 環とする．

1. $\Phi\colon E(M) \to E(N)$ を順序同型とする．このとき，$\Phi(1/2)$ および $1 - \Phi(1/2)$ は N の局所可測作用素全体のなす環において可逆である．
2. $a \in E(M)$ とする．このとき，a と $1 - a$ の双方が M の局所可測作用素全体のなす環で可逆であることは，ある自己順序同型 $\Phi\colon E(M) \to E(M)$ に対して $\Phi(1/2) = a$ が成り立つことと同値である．

局所可測作用素について詳しく説明はしないが，作用素 $a \in M_+$ に対し，a が局所可測作用素のなす環で可逆であるという条件は以下と同値である（[13, Lemma 2.2]）：$b \in M_+$ が $\{x \in M_+ \mid x \leq a,\, x \leq b\} = \{0\}$ を満たすならば，$b = 0$ である．

あとは，1/2 を保つ順序同型の一般形を考えればよい．これは次よりわかる．

定理 4.6 (森，[13, Theorem 3.8])**.** M, N を von Neumann 環，$\Phi\colon E(M) \to E(N)$ を順序同型とする．このとき，$\Phi(\mathcal{P}(M)) = \mathcal{P}(N)$ が成り立つ．さらに $\Phi(1/2) = 1/2$ を仮定すると，$\Phi|_{\mathcal{P}(M)}\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ は orthoisomorphism となる．もしさらに M が可換な直和成分を持たないなら，Φ は M から N への Jordan $*$-同型に拡張する．

Molnár, Šemrl による $B(H)$ の設定における先行研究においては，階数 1 の射影を考えることが本質的に重要であった．容易にわかるように，$B(H)_{sa}$ の二つの作用素 a, b が $a \leq b$ を満たすとき，$b - a$ が階数 1 の射影の定数倍であることは，区間 $\{x \in B(H)_{sa} \mid a \leq x \leq b\}$ が全順序集合となることと同値である．このことから，$B(H)$ の設定では，任意の順序同型は「階数 1 の射影の定数倍の差」を保存することがわかる．$B(H)$ の場合にはこの事実を軸とした議論が可能であるが，一般の von Neumann 環の設定では難しい．その代わりに既出の Dye の定理（定理 3.12）を用いた．これが effect algebra を経由した議論を要した理由に他ならない．

定理 4.6 の証明（特に前半部分）について簡単に解説しよう．組 $(x, y) \in E(M) \times E(M)$ に対して，次の条件を考える：

$(*)$ 作用素 $a \in E(M)$ が $a \leq x$ かつ $a \leq y$ を満たすならば，$a = 0$ が成り立つ．[*4]

$p \in \mathcal{P}(M)$ とする．$q := 1 - p$ とおく．このとき，組 (p, q) は条件 $(*)$ を満たす．さらに，組 $(x, y) \in E(M) \times E(M)$ が条件 $(*)$ および $p \leq x$, $q \leq y$ をすべて満たすならば，$(x, y) = (p, q)$ が成り立つ．

Φ は順序同型なので，次が従う：組 $(\Phi(p), \Phi(q)) \in E(N) \times E(N)$ は N での条件 $(*)$ を満たす．さらに，組 $(x, y) \in E(N) \times E(N)$ が条件 $(*)$ および $\Phi(p) \leq x$, $\Phi(q) \leq y$ をすべて満たすならば，$(x, y) = (p, q)$ が成り立つ．仮に $\Phi(p) \notin \mathcal{P}(M)$ とする．$0 < \alpha < 1$ を固定する．前述の関数 f_α を考えると，$\Phi(p) \leq f_\alpha(\Phi(p))$, $\Phi(q) \leq f_\alpha(\Phi(q))$ かつ $f_\alpha(\Phi(p)) \neq \Phi(p)$ が成り立つ．f_α は $E(N)$ 上の順序同型を定めるので，組 $(f_\alpha(\Phi(p)), f_\alpha(\Phi(q)))$ も条件 $(*)$ を満たすことになるが，これは矛盾である．よって $\Phi(p) \in \mathcal{P}(N)$ が成り立つ．

したがって, $\Phi(q) \in \mathcal{P}(N)$ も成り立つ．$\Phi(1/2) = 1/2$ を仮定すれば, $\Phi(q/2) = \Phi(q)/2$ が導かれる．次の事実に着目する：$x \in E(M)$ が $x \geq p$ かつ $x \geq q/2$ を満たすならば $x \geq 1/2$ が成り立つ．Φ は順序同型，$\Phi(1/2) = 1/2$ なので，$x \in E(N)$ が $x \geq \Phi(p)$ かつ $x \geq \Phi(q)/2$ を満たすならば $x \geq 1/2$ が成り立つ．これを用いて，$\Phi(p)$ と $\Phi(q)$ が互いに直交することが示される．Φ^{-1} について同じ議論を行えば, $\Phi|_{\mathcal{P}(M)}$ が orthoisomorphism であることがわかる．

したがって，I_2 型の場合を除けば，Dye の定理より $\Phi|_{\mathcal{P}(M)}$ は M から N への Jordan $*$-同型に拡張する．M, N が可換な直和成分を持たなければ，この Jordan $*$-同型がもとの順序同型と一致することが示される．

この定理を用いることで，可換な直和成分を持たない von Neumann 環の一般の区間のあいだの順序同型についてわかり，定理 4.3 の証明が可能となる．

注 4.7. $E(B(H))$ 上の自己順序同型に対し $B(H)_+$ 上の自己順序同型を次のように対応づけることができる ([18, Theorem 3.1])：Φ を $E(B(H))$ 上の自己順序同型とする．$I := \{a \in E(B(H)) \mid 1 - a$ は可逆 $\}$ とおくと，$\Phi(I) = I$ が成り立つ．写像 $f\colon [0, 1) \to [0, \infty)$ を $f(t) := (1 - t)^{-1} - 1$ で定めると，（連続 functional calculus について）$f(I) = B(H)_+$ であり，f は I から $B(H)_+$ への順序同型を与える．ゆえに，Φ に対して順序同型 $f \circ \Phi \circ f^{-1}\colon B(H)_+ \to B(H)_+$ が対応する．

この対応は全単射であり，よって $B(H)_+$ 上の自己順序同型群は $E(B(H))$ 上の自己順序同型群と群同型であることがわかる．$B(H)_+$ 上の自己順序同型は比較的容易に理解で

[*4] これは [13] に登場する条件より弱いが，この条件を考えれば十分である．

きる（定理 4.2）ため，この対応によって $E(B(H))$ 上の自己順序同型の構造について知ることができる．

一般の von Neumann 環の設定においても，局所可測作用素のなす環を用いることで全く同様の対応づけができる（[13, Proposition 4.4]）．

5　問題

この節では，保存問題に関わる未解決の問題を羅列する．

Tingley 問題に関して，次は未解決であり，筆者にとって興味深い．

問題 5.1. X, Y を Banach 空間，$\Phi\colon S_X \to S_Y$ を全射等距離写像とする．次のそれぞれの仮定の下で，Φ は実線型写像に拡張するか．

- X（と Y）が実二次元のとき．
- X, Y が C* 環の自己共役作用素全体の空間のとき．
- X が von Neumann 環の前双対空間，Y は一般の実 Banach 空間のとき．
- X, Y が非可換 L^p 空間，$1 < p < \infty, p \neq 2$ のとき．

また，次が肯定的に示されれば Tingley 問題への応用が期待できる．（cf. [11, Theorem 2]）

問題 5.2. X, Y を Banach 空間，$\mathcal{C} \subset Y$ を凸集合，Φ を X の単位閉球から $\mathcal{C}$ への全射等距離写像とする．このとき，Φ は affine か．

筆者の結果を一般化する方向として，次の問題が考えられる．

問題 5.3. A, B を C* 環，$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(A)$, $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(B)$ をそれぞれ $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$ の連結成分とする．$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への全射等距離写像の一般形を与えよ．

問題 5.4. A, B を C* 環とする．A_{sa} から B_{sa} への順序同型の一般形を与えよ．affine でない順序同型が存在するのはいつか．

最後に，筆者のこれまでの研究とは直接の関係はないが，保存問題の重要未解決問題を二つだけ紹介して，この概説を終えたい．

問題 5.5. A, B を単位的 C* 環，$\Phi\colon A \to B$ を複素線型全単射とし，$\Phi(1) = 1$ を仮定する．さらに，任意の $x \in A$ に対して次が成り立つとする：x が A 上可逆 $\Longleftrightarrow$ $\Phi(x)$ が

B 上可逆．このとき，Φ は Jordan 同型であるか．すなわち，任意の $x, y \in A$ に対して $\Phi(xy + yx) = \Phi(x)\Phi(y) + \Phi(y)\Phi(x)$ が成り立つか．

より一般の semisimple Banach 環の設定でこの主張が成り立つという予想は Kaplansky 予想とよばれるが，上記 C* 環の設定でも未解決である．部分的な結果として，A と B が von Neumann 環の場合は成り立つことが示されている．この問題については，[1] が詳しい．

もう一つが，Kadison の相似問題とよばれる問題である．

問題 5.6. A を単位的 C* 環，$\Phi\colon A \to B(H)$ を単位的，有界な環準同型（すなわち，複素線型かつ乗法的）とする．このとき，次が成り立つか：ある有界作用素 $S \in B(H)$ と $*$-準同型（すなわち C* 環としての準同型）$\pi\colon A \to B(H)$ が存在して，$\Phi(x) = S\pi(x)S^{-1}$, $x \in A$ を満たす．

この問題に対しては，作用素環の研究者の手による研究成果がたくさんある．詳しくは [16] や [14] を見るとよい．

参考文献

[1] A. Bourhim and J. Mashreghi, A survey on preservers of spectra and local spectra, Invariant subspaces of the shift operator, 45–98, Contemp. Math., 638, Centre Rech. Math. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] H.A. Dye, On the geometry of projections in certain operator algebras, *Ann. of Math.* (2) **61** (1955), 73–89.

[3] G.P. Gehér and P. Šemrl, Isometries of Grassmann spaces, II, *Adv. Math.* **332** (2018), 287–310.

[4] O. Hatori and L. Molnár, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^*-algebras, *J. Math. Anal. Appl.* **409** (2014), no. 1, 158–167.

[5] R.V. Kadison, Isometries of operator algebras, *Ann. of Math.* (2) **54** (1951), 325–338.

[6] R.V. Kadison, A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras, *Ann. of Math.* (2) **56**, (1952). 494–503.

[7] P. Mankiewicz, On extension of isometries in normed linear spaces, *Bull. Acad.*

Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **20** (1972), 367–371.

[8] L. Molnár, Order-automorphisms of the set of bounded observables. *J. Math. Phys.* **42** (2001), no. 12, 5904–5909.

[9] L. Molnár, "Selected preserver problems on algebraic structures of linear operators and on function spaces", Lecture Notes in Mathematics, 1895. Springer-Verlag, Berlin (2007).

[10] M. Mori, Tingley's problem through the facial structure of operator algebras, *J. Math. Anal. Appl.* **466** (2018), no. 2, 1281–1298.

[11] M. Mori and N. Ozawa, Mankiewicz's theorem and the Mazur–Ulam property for C*-algebras, accepted for publication in *Studia Math.*

[12] M. Mori, Isometries between projection lattices of von Neumann algebras, accepted for publication in *J. Funct. Anal.*

[13] M. Mori, Order Isomorphisms of Operator Intervals in von Neumann Algebras, *Integral Equations Operator Theory* **91** (2019), no.2, 91:11.

[14] N. Ozawa, An Invitation to the Similarity Problems (after Pisier), 数理解析研究所講究録 **1486** (2006), 27–40.

[15] A.M. Peralta, A survey on Tingley's problem for operator algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **84** (2018), no. 1–2, 81–123.

[16] G. Pisier, Similarity problems and completely bounded maps, Second, expanded edition, Lecture Notes in Mathematics, 1618. Springer–Verlag, Berlin, 2001. viii+198 pp.

[17] P. Šemrl, Order isomorphisms of operator intervals. *Integral Equations Operator Theory* **89** (2017), no. 1, 1–42.

[18] P. Šemrl, Groups of order automorphisms of operator intervals, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **84** (2018), no. 1–2, 125–136.

[19] M. Takesaki, "Theory of operator algebras. I", Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1979).

[20] R. Tanaka, Tingley's problem on finite von Neumann algebras, *J. Math. Anal. Appl.* **451** (2017), 319–326.

[21] D. Tingley, Isometries of the unit sphere, *Geom. Dedicata* **22** (1987), 371–378.

[22] *Acta Sci. Math. (Szeged)* **84** (2018), no. 1–2.

森 迪也
東京大学大学院数理科学研究科
〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1
E-mail: mmori@ms.u-tokyo.ac.jp